Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2012
EGZAMIN PODSTAWOWY

28 stycznia 2012

Zadanie 1.
Niech f będzie funkcją nieujemną mierzalną, a A zbiorem mierzalnym w przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Pokazać, że dla każdego $c > 0$ zachodzi nierówność:

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) > c\} \cap A\big) \leq \frac{1}{c} \int_A f(x)\, d\mu(x).$$

ROZW.: Po pierwsze, zbiór $\{x \in X : f(x) > c\}$ jest mierzalny jako przeciwobraz półprostej przez funkcję mierzalną. Dalej mamy

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) \geq \int_{\{x \in X : f(x) > c\} \cap A} f(x)\, d\mu(x) \geq c \cdot \mu\big(\{x \in X : f(x) > c\} \cap A\big)$$

(obie nierówność wynikają z monotoniczności całki; pierwsza dodatkowo z tego, że f jest nieujemna i drugi zbiór jest zawarty w pierwszym, a druga z tego, że na danym zbiorze $f > c$). Teraz dzielimy obie strony przez c i dostajemy tezę.

Zadanie 2.
Na przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{F}, \mu)$ dany jest ciąg funkcji nieujemnych mierzalnych f_n zbieżny według miary do zera, ale taki, że całki $\int f_n\, d\mu$ nie dążą do zera. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \sup_n f_n(x)$ ma całkę nieskończoną.

ROZW.: Gdyby funkcja g miała całkę skończoną, to ciąg f_n byłby zmajoryzowany (przez g). Wiemy, że Tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej zachodzi również dla zbieżności według miary. Zatem zachodziłaby zbieżność całek

$$\lim_n \int f_n\, d\mu = \int \lim_n f_n\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0.$$

A tak nie jest.

Zadanie 3.
Na przestrzeni mierzalnej (X, Σ) dane są dwie miary skończone μ_1 i μ_2. Niech μ oznacza sumę tych miar: $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Udowodnij, że istnieje funkcja mierzalna f o wartościach w przedziale $[0, 1]$, taka że $d\mu_1 = f\, d\mu$ oraz $d\mu_2 = (1 - f)\, d\mu$.

ROZW.: Obie miary są absolutnie ciągłe względem μ (μ zeruje się na jakimś zbiorze wtedy i tylko wtedy gdy zerują się na nim obie miary μ_1 i μ_2). Z Twierdzenia Radona–Nikodyma istnieją gęstości f i g (określone prawie wszędzie, powiedzmy na zbiorze X' o dopełnieniu miary μ zero). Wtedy na X' mamy $\mu = (f + g)\, d\mu$ co, z jednoznaczności gęstości oznacza, że $f + g \equiv 1$ μ-p.w., czyli na zbiorze $X'' \subset X'$ o dopełnieniu miary μ zero. Czyli na X'' mamy $g = 1 - f$. Ponieważ g jest nieujemna, zatem f przyjmuje na X'' wartości w $[0, 1]$. Poza zbiorem X'' można przyjąć $f = g = \frac{1}{2}$ (nie ma to wpływu na miary $\mu_f = \mu_1$ i $\mu_g = \mu_2$) i warunek $f = 1 - g$ będzie tu też spełniony.

ZADANIA DLA POPRAWIAJĄCYCH NA OCENĘ 4 i 4,5

Zadanie 1A.
Udowodnij, że jeśli $f = f_1 - f_2$, gdzie f_1 i f_2 są nieujemne, to $f_1 = f^+$ i $f_2 = f^-$ wtedy i tylko wtedy gdy $f_1 f_2 \equiv 0$.

ROZW.: Wiemy z wykładu, że przy założeniach z zadania istnieje nieujemna funkcja h taka, że $f_1 = f^+ + h$ oraz $f_2 = f^- + h$. Zatem

$$f_1 f_2 = f^+ f^- + h(f^+ + f^- + h).$$

Z definicji funkcji f^+ i f^- wynika łatwo, że $f^+ f^- \equiv 0$. Zatem $f_1 f_2 \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $h(f^+ + f^- + h) \equiv 0$, co jest równoważne temu, że $h \equiv 0$, a to z kolei oznacza, że $f_1 = f^+$ i $f_2 = f^-$.

Zadanie 2A.
Korzystając z Twierdzenia Fubiniego wykaż, że dla dowolnej mierzalnej funkcji nieujemnej f na przestrzeni miarowej (X, μ) mamy

$$\int f \, d\mu = \int_{[0,\infty)} \mu\{x : f(x) \geq t\} \, d\lambda(t)$$

(ostatnia całka jest względem miary Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$).
Wskazówka: Aby stosować tw. Fubiniego potrzebna jest funkcja dwóch zmiennych, x i t. Bez tego ani rusz! Trzeba, patrząc na wykres funkcji f, sprytnie zdefiniować pomocniczą funkcję $g(x,t)$ na $X \times [0,\infty)$.

ROZW.: Definiujemy

$$g(x,t) = \begin{cases} 1, & gdy\ f(x) \geq t \\ 0, & gdy\ f(x) < t \end{cases}.$$

Funkcja ta jest NIEUJEMNA, wiec calka po mierze produktowej ma sens, zatem obie calki iterowane są równe.

$$\int \left(\int_0^\infty g(x,t)\ dt \right)\ d\mu(x) = \int \left(\int_0^{f(x)} 1\ dt \right)\ d\mu(x) = \int f(x)\ d\mu(x) = \int f\ d\mu.$$

Natomiast po zamianie dostaniemy

$$\int_0^\infty \left(\int g(x,t)\ d\mu(x) \right)\ dt = \int_0^\infty \mu\{x : f(x) \geq t\}\ dt.$$

Zatem prawe strony obu powższych równań są sobie równe.

ZADANIA DLA POPRAWIAJĄCYCH NA OCENĘ 5 i 5,5

Zadanie 1B.
Na przestrzeni mierzalnej (X, Σ) dane są dwie miary μ i ν, przy czym $\nu \preccurlyeq \mu$. Wiadomo, że μ rozkłada się na sumę $\mu_1 + \mu_2$, gdzie $\mu_1 \preccurlyeq \nu$ a $\mu_2 \perp \nu$. Udowodnij, że $\nu \preccurlyeq \mu_1$.

ROZW.: Niech $\mu_1(A) = 0$. Niech D spełnia $\mu_2(D) = \nu(D^c) = 0$. Wtedy

$$\nu(A) = \nu(A \cap D^c) + \nu(A \cap D).$$

Pierwszy składnik jest zero, bo $\nu(D^c) = 0$. Dalej, mamy $\mu(A \cap D) = \mu_1(A \cap D) + \mu_2(A \cap D)$. Pierwszy wyraz jest zero, bo $\mu_1(A) = 0$, a drugi, bo $\mu_2(D) = 0$. Zatem $\mu(A \cap D) = 0$, a ponieważ $\nu \preccurlyeq \mu$, to $\nu(A \cap D) = 0$, a to jest drugi składnik w wystrzelonym wzorze. Stąd $\nu(A) = 0$, co trzeba było pokazać.

Zadanie 2B.
Dana jest funkcja $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, która jest niemalejąca, $g(0) = 0$, i spełnia warunek Lipshitza, tzn. istnieje stała $c > 0$ taka, że $|g(x) - g(y)| \leq c|x - y|$. Korzystając z twierdzenia Radona-Nikodyma oraz wiadomości o dystrybuantach, wykaż, że g jest postaci

$$g(t) = \int_{(0,t]} f(x)\, d\lambda(x)$$

dla pewnej nieujemnej funkcji mierzalnej $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a.
Wskazówka: To jest piękne zadanie, jednak wieloetapowe. Najpierw trzeba zauważyć, że g jest dystrybuantą pewnej miary μ, a następnie, korzystając z warunku Lipshitza pokazać, że miara ta jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Może tu się przydać regularność miary Lebesgue'a. W ostatnim etapie trzeba skorzystać z twierdzenia Radona-Nikodyma.

ROZW.: Funkcja Lipschitzowska jest ciągła. Jak wiemy, taka funkcja g jest dystrybuantą pewnej miary borelowskiej μ na $[0, \infty)$. Pokażemy, że miara ta jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. To, w połączeniu z tw. R-N da istnienie funkcji gęstości R-N, którą właśnie oznaczymy przez f. Wtedy będziemy mieć: (najpierw korzystamy z def. dystrybuanty, potem z def. gęstości)

$$g(t) = \mu((0, t]) = \int_{(0,t]} f(x)\, d\lambda(x).$$

No więc pokazujemy tą absolutną ciągłość: Weźmy zbiór A miary Lebesgue'a zero. Z regularności miary istnieje zbiór otwarty $U \supset A$ taki, że $\lambda(U) < \epsilon$. Wiemy z topologii, że zbiór U jest przeliczalną rozłączną sumą przedziałów otwartych $U = \bigcup_n (a_n, b_n)$. Z definicji dystrybuanty, $\mu((a_n, b_n)) \leq \mu((a_n, b_n]) = g(b_n) - g(a_n)$. Z warunku Lipshitza, $g(b_n) - g(a_n) \leq c(b_n - a_n) = c\lambda((a_n, b_n))$. Zatem $\mu(U) \leq c\lambda(U) < c\epsilon$. Stąd $\mu(A) < c\epsilon$. Ponieważ ϵ jest dowolny, wyszło $\mu(A) = 0$. Koniec.

Tomasz Downarowicz